

Title	確率論への積分方程式の應用, V (Banach 空間に於ける mean ergodic theorem)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 164 p.394-p.397
Issue Date	1938-09-05
oa:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74649
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

720. 確率論へノ積分方程式ノ應用, V (Banach
空間ニ於ケル mean ergodic theorem)

吉田 耕作 (阪大)

談話 680 (p. 308) = 於テ角谷君ハ C. Visserノ
定理 (談話 679)ヲ complex Banach 空間 L_2 ニ
拡張サレタ。之レハ相當一般ノ結果デアルケレドモ, 具体的
ノ問題ニ應用スルニハ 弱收斂ジハ弱スヤル。考ヘ直シテミタ
ラ、實ハ 強收斂定理ガ得ラレルコトガワカリマシタ。証明モ
大分簡便化サレタ様デス。

§10. L_2 ニ於ケル mean ergodic
theorem

定理 \mathcal{L} は \mathcal{L} 内 = 弱線型 operator T が次の二条件ヲ満足スルトスル。即チ

$$(1) \quad \|T^n\| \leq \text{常数 } C \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(2) \quad \begin{cases} T \text{ は } \mathcal{L} \text{ の単位球 } \|x\| \leq 1 \text{ 上 } \mathcal{L} \text{ 内 = 於て weakly} \\ \text{compact 集合 = 写ス。} \end{cases}$$

然ラバ全テ、 $x \in \mathcal{L}$ = 対シテ数列 $\{x_n\}$

$$x_n = \frac{T \cdot x + T^2 \cdot x + \dots + T^n \cdot x}{n}$$

が強収斂スル。

$$\text{証明} \quad x_n = T \cdot \left\{ \frac{x + T \cdot x + \dots + T^{n-1} \cdot x}{n} \right\}. \quad \text{右辺ノ}$$

括弧内ハ (1) = ヨリ其ノ絶対値 $C\|x\|$ ヲ越エナイ。故ニ
(2) = ヨリ或ル部系列 $\{x_{n_i}\}$ が \mathcal{L} ノ点 \bar{x} = 弱収斂スル。即チ全テノ linear functional f = 対シテ

$$(3) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = f(\bar{x})$$

所ガ (1) = ヨリ $\|Tx_{n_i} - x_{n_i}\| \leq \frac{2C}{n_i} \|x\|$ ガカラ $T \cdot \bar{x} = \bar{x}$

ガワカレ。

$$\text{從ツテ } x_n = \bar{x} + Z_n, \quad Z_n = \frac{T + T^2 + \dots + T^n}{n} (x - \bar{x})$$

ヲ得ル。故ニ結局 Z_n が 0 = 強収斂スルコトガ云ヘレバヨイ。

猶テ $(x - \bar{x})$ が $(y - T \cdot y)$ ノ形デアレバ (1) = ヨリ
 $\left\| \frac{T + \dots + T^n}{n} (y - T \cdot y) \right\| \leq \frac{2C}{n} \|y\|$ ガカラ Z_n ハ 0 = 強収

歟スル。又 $(x - \bar{x})$ が $(y - T \cdot y)$ の如き形ノ点ノ集積点
 デアレバ、任意ノ $\varepsilon > 0$ に対シテ $\|(x - \bar{x}) - (y - T \cdot y)\| \leq \varepsilon$
 ナル如キ $y \in \mathcal{L}_0$ が存在スル。然ラバ (1) = ヨリ

$$\left\| z_n - \frac{T + \dots + T^n}{n} (y - T \cdot y) \right\| \leq C \varepsilon$$

トナル。 ε ハ任意ガカラ上カラ結局 z_n が 0 = 強収歟
 スル。

故ニ $(y - T \cdot y)$ ノ形ノ点ノ張ル線状閉集合ヲ \mathcal{L}_0 トス
 ルトキ $(x - \bar{x}) \in \mathcal{L}_0$ ガ云ヘルトヨイ。若シ然ラズトスレ
 バ Banach ノ定理⁽¹⁾ = ヨリ 次ノ如キ linear function-
 al f_0 が存在スル:

$$f(z) = 0 \text{ for all } z \in \mathcal{L}_0, \quad f_0(x - \bar{x}) = 1.$$

然ラバ $(x - Tx) \in \mathcal{L}_0$ カラ $f_0(x) = f_0(Tx)$. $(T \cdot x - T^2 \cdot x)$
 $\in \mathcal{L}_0$ カラ $f_0(Tx) = f_0(T^2x)$. 以下同様ニシテ $f_0(x) =$
 $f_0(T^m \cdot x)$ for $m = 1, 2, \dots$.

$$\text{故ニ } f_0(x) = f_0\left(\frac{Tx + T^2x + \dots + T^nx}{n}\right) \text{ for } n = 1, 2, \dots$$

従ツテ \bar{x} ノ定義 (3) カラ $f_0(x) = f_0(\bar{x})$ ヲ得ル。之レハ
 $f_0(x - \bar{x}) = 1$ ナル。以上。

系. 唯 $x \rightarrow \bar{x}$ が線型 operator T_1 ; $\bar{x} = T_1 \cdot x$ ナ
 疾ヘラレルコトハ明カ。 $T\bar{x} = \bar{x}$ = ヨツテ $TT_1 = T_1$, 従

(1) S. Banach: *Theorie des operations lineaires*. p. 57.

ツテ $T^n T_1 = T_1$, 之レヨリ $T_1^2 = T_1$ ヲ得ル。又

$$\left\| \frac{T + \dots + T^n}{n} x - \frac{T + \dots + T^n}{n} T_1 x \right\| \leq \frac{2C}{n} \|x\| = \varepsilon$$

テ $T_1 T = T_1$. フトスレ

$$(4) \quad T_1^2 = T_1, \quad T T_1 = T_1 T = T_1.$$

T_1 の意味ハ次ノ通りデアアル。任意ノ $x \in \mathcal{L} =$ 対シ
 $T(T_1 x) = (T T_1) x = T_1 x$. 又 $T \cdot y = y$ トスレバ
 $T^n \cdot y = y$ 従ツテ $T_1 \cdot y = y$. 故ニ T_1 ハ \mathcal{L} 上ノ固有
 値 1 = 属スル固有空間 = 寫ス *projection operator*
 デアル。

任意ノ $\lambda, |\lambda| = 1$, = 對シテ $\frac{T}{\lambda}$ が定理ノ條件ヲ満ス

カニ *strong limit* $T_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{T}{\lambda} \right)^i \right\}$ が、上述カラ

$$T_\lambda^2 = T_\lambda, \quad T T_\lambda = T_\lambda T = \lambda T_\lambda$$

ヲ満足スル訳デアアル。此ノ系ハ角谷君ノ得ヲレタノト同一デア
 リマス。

注意. *von Neumann, mean ergodic theorem* ハ、 \mathcal{L} が Hilbert 空間、 T が unitary
 + 場合ノ 強収斂定理 デアルが、unitary デアレバ必
 然的ニ *inverse* T^{-1} が存在スルカラ、一般ノ *stochastic process*
 = ハ使ヘナイ。本定理ハ此ノ点及ビ Hilbert
 空間ヲ離レクコトニ於テ應用範圍ガズツト廣イ訳デアリマス。